13. РАВНОМЕРНА КОНВЕРГЕНЦИЈА

ПРИМЕРИ

Претпоставимо да је f_n неки низ реланих функција који на скупу $A \subseteq \mathbf{R}$ конвергира функцији f. Логично је очекивати да се особине граничне функције f могу одредити на онову особина функција f_n. Међутим, то се показује тачно у веома малом броју случајева. На пример, ако су све функције f_n растуће, тада једноставним проласком лимеса кроз $f_n(x) \leq f_n(y)$ закључујемо да је и гранична функција f растућа. Слично, ако су све функције f_n конвексне, тада је и f конвексна, што се види једноставним преласком на лимес у неједнакости

$$f_n(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f_n(x) + (1-\theta) f_n(y).$$

И ту се отприлике завршава оно што можемо да закључимо о граничној функцији на основу својстава функција f_n. Осим неједнакости гранична вредност ништа више не чува. Да бисмо се у то уверили размотримо следеће примере.

13.1. Некомутативност лимеса. Размотримо двоструки низ

$$x_{m,n} = \frac{m-n}{m+n},$$

односно пресликавање $x : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{R}$. Редослед којим ћемо пустити $n \to +\infty$ и $m \to +\infty$ од пресудне је важности за резултат. Наиме,

$$\lim_{m\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} x_{m,n} = \lim_{m\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} \frac{m-n}{m+n} = \lim_{m\to+\infty} -1 = -1,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{m\to+\infty} x_{m,n} = \lim_{n\to+\infty} \lim_{m\to+\infty} \frac{m-n}{m+n} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1.$$

Дакле два лимеса не могу безболно заменити места.

13.2. Прекид граничне функције. Нека је $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$,

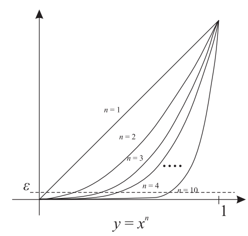
$$f_n(x) = x^n.$$

Овај низ (видети параграф 2.7) конвергира ка 1 за $x = 1$, односно ка нули за $0 \le x < 1$. Другим речима

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

Дакле, иако су све f_n непрекидне, гранична функција није непрекидна у јединици.

Заправо, овде се може видети у ком грму лежи зец. За дато $\varepsilon > 0$, да би се обезбедило $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, број n мора бити све већи и већи уколико је x ближе тачки 1 - видети слику 1.



Слика 1

13.3. Дивергенција низа извода. Низ функција $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ дат са

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sin nx$$

у свакој тачки конвергира ка нули. Овде имамо посла са низом диференцијабилних функција чија је гранична функција диференцијабилна. Међутим, низ изводних функција

$$f_n'(x) = \cos nx$$

дивергира свуда осим у тачкама облика $2k\pi$.

Дакле, извод лимеса постоји и једнак је нули, док лимес извода не постоји.

13.4. Неограниченост граничне функције. Низ функција $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ дат са

$$f_n(x) = \min\{x, n\}$$

је низ ограничених функција, који конвергира ка неограниченој функцији $f(x) \equiv x$.

13.5. Некомутативност лимеса и интеграла. Низ функција $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$, дат са

$$f_n(x) = n^2 x(1-x^2)^n$$

је низ интеграбилних функција који тежи ка 0 за све x. За $x > 0$ то је стога што $(1-x^2)^n$ брже тежи ка нули него што n^2 тежи ка бесконачности. За $x = 0$ је $f_n(0) = 0$.

Међутим

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = n^2\int_0^1 x(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}n^2\int_1^0 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{n^2}{2(n+1)},$$

а то је низ бројева који тежи ка бесконачности.

Дакле, интеграл лимеса једнак је нули, док је лимес интеграла једнак $+\infty$.

13.6. Дирихлеова функција. Позната Дирихлеова функција, $D : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дефинисана са

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q} \\ 0, & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

може се приказати као

$$D(x) = \lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}(\cos m!\pi x)^{2n},$$

што је (додуше двоструки) лимес непрекидних функција. Заиста, ако $x \notin \mathbf{Q}$ тада је број $\cos m!\pi x$ увек строго између -1 и 1, па унутрашњи лимес даје нулу. Ако је, пак, $x \in \mathbf{Q}$ тада је за m веће од имениоца броја x, $m!\pi x$ целобројни умножак броја π, па је његов косинус једнак ± 1. Отуда је унутрашњи лимес једнак 1, за $m \geq m_0$.

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

13.7. Дефиниција. Нека је A неки скуп, M метрички простор и $f_n : A \to M$ низ функција.

• Кажемо да f_n *равномерно конвергира* ка f на скупу $B \subseteq A$, и пишемо $f_n \rightrightarrows f$ ако

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbf{N} \; \forall n \geq n_0 \; \forall x \in B \;\; d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon. \tag{1}$$

Ако не нагласимо скуп B, онда се подразумева скуп A - максималан заједнички домен функција f_n.

• Нека је и A метрички простор. Кажемо да f_n конвергира *локално равномерно* на B ако за све $x_0 \in B$ постоји околина U тачке x_0 таква да $f_n \rightrightarrows f$ на U.

Ако се подсетимо дефиниције обичне конвергенције, она гласи: за свако $x \in B$, $f_n(x) \to f(x)$, односно

$$\forall x \in B \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbf{N} \; \forall n \geq n_0 \;\; d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon. \tag{2}$$

Разлика између равномерне и обичне конвергенције, однсно између (1) и (2) је само у распореду квантификатора $\forall x \in B$ и $\exists n_0 \in \mathbf{N}$. Логичка разматрања казују да

$$\exists n_0 \, \forall x \quad \Rightarrow \quad \forall x \, \exists n_0$$

а да обратно не стоји. Слично као што се народна пословица за сваку врећу постоји закрпа може узети за тачну, а њен обрат постоји закрпа која ће закрпити све вреће нипошто не може.

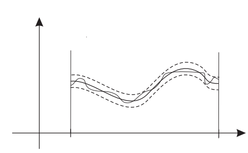
Обични конвергенцију зваћемо друкчије и *конврегенција тачка по тачка* или *конвергенција т.п.т.*

Дакле важи импликација

$$f_n \rightrightarrows f \quad \Rightarrow \quad f_n \to f \text{ т.п.т.},$$

али не и обратна.

Иначе, равномерна конвергенција тражи да избор n_0 који контролише брзину конвергенције мора бити исти за све $x \in B$, односно да се за $n \geq n_0$ графици свих функција f_n морају налазити у траци ширине ε око графика функције f - слика 2.



Слика 2

13.8. Став [ситна правила]. а) Низ функција $f_n \rightrightarrows f$ на скупу B ако и само ако је

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in B} d(f_n(x), f(x)) = 0. \tag{3}$$

(Ово је *Кошијева карактеризација*;)

б) Ако на скупу B важи $d(f_n(x), f(x)) \le \alpha_n$, при чему низ α_n тежи ка нули и не зависи од x онда $f_n \rightrightarrows f$ на B;

в) Ако $f_n \rightrightarrows f$ на B и $C \subseteq B$, онда $f_n \rightrightarrows f$ на C;

г) Ако $f_n \rightrightarrows f$ на скуповима $B_1, B_2, \dots, B_k$ онда f_n равномерно конвергира и на унији $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$;

д) Ако је скуп B коначан и $f_n \to f$ т.п.т., онда $f_n \rightrightarrows f$ на B;

ђ) Ако $f_n \to f$ локално равномерно на B, и ако је B компактан скуп, онда f_n равномерно конвергира ка f на B (без оног локално).

Доказ. а) Реп деифиниције (1) $\forall x \in B \;\; d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ еквивалентан је са $\sup\limits_{x \in B} d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. (Истина у директном смеру појављује се $\le$ уместо $<$, али то не мења ствар, јер је ε универзално квантификовано.) Тада (1) постаје

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbf{N} \; \forall n \in \mathbf{N} \;\; \sup_{x \in B} d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon,$$

а то је управо (3);

б) Следи из претходне тачке и става о два милиционера, јер је тада

$$0 \le \sup_{x \in B} d(f_n(x), f(x)) \le \alpha_n;$$

в) Ако нешто важи за све $x \in B$ - већег скупа, онда важи и за све $x \in C$ - мањег скупа;

г) Постоји n_j тако да за све $n \ge n_j$ и све $x \in B_j$ важи $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. Узмимо $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Одавде је јасно да се равномерна конвергенција не може пренети са бесконачно много скупова на њихову унију;

д) Јасно је да сваки конвергентан низ конвергира равномерно на једночланом скупу. Применимо претходну тачку;

ђ) За свако x постоји околина U_x на којој f_n равномерно конвергира. Колекција околине U_x, $x \in B$ покривају B, па се из те колекције може издвојити коначно потпокривање. Дакле, $B \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{x_j}$. Према тачки г) f_n равномерно конвергира на скупу $\bigcup U_{x_j}$, а према тачки в) и на мањем скупу B. □

13.9. Став [линеарност]. Ако $f_n \rightrightarrows f$ и $g_n \rightrightarrows g$ тада и $\lambda f_n + \mu g_n \rightrightarrows \lambda f + \mu g$.

Доказ. Једноставно следи, јер је

$$\sup ||(\lambda f_n + \mu g_n) + (\lambda f + \mu g)|| \le |\lambda| \sup ||f_n - f|| + |\mu| \sup ||g_n - g||.$$

□

Међутим, из $f_n \rightrightarrows f$ и $g_n \rightrightarrows g$ не следи $f_n g_n \rightrightarrows fg$. На пример $f_n(x) = g_n(x) = x + 1/n$ равномерно конвергира ка x на читавом $\mathbf{R}$, док је

$$f_n(x) g_n(x) = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \to x^2.$$

Међутим, последња конвергенција није равномерна, јер је супремум разлике $2x/n + 1/n^2$ по свим $x \in \mathbf{R}$ једнак $+\infty$.

13.10. Став. Нека $f_n \rightrightarrows f$ на скупу B. Тада
а) Ако су све f_n ограничене, онда је и f ограничена;
б) Ако су све f_n непрекидне, онда је и f непрекидна.

Доказ. а) Претпоставимо супротно, да је f неограничена. Нека је $n \in \mathbf{N}$ фиксиран. Како је f_n огранчена, то је за све $x \in B$, $||f_n(x)|| \leq M_n$. Како је f неограничена, то постоји $x \in B$ тако да је $||f(x)|| > M_n + 1$, и тада је

$$\sup_{x\in B} ||f_n(x) - f(x)|| \geq ||f_n(x_0) - f(x_0)|| \geq 1;$$

б) Нека је $x_0 \in B$. За све $x \in B$ имамо

$$||f(x) - f(x_0)|| \leq ||f(x) - f_n(x)|| + ||f_n(x) - f_n(x_0)|| + ||f_n(x_0) - f(x_0)||.$$

Због равномерне конвергенције, први и трећи сабирак се могу учинити мањим од $\varepsilon/3$, за све $n \geq n_0$ и све $x \in B$. (Улога равномерне конвергенције је у томе да је n_0 исто и у првом и у трећем сабирку и да не зависи од x.) Заправо нама је довољно за $n = n_0$, јер је f_{n_0} непрекидна, па се и други сабирак може учинити мањим од $\varepsilon/3$ за x из неке довољно мале околине тачке x_0. ☐

Примедба: Претходни доказ у ствари доказује да лимеси кад $n \to +\infty$ и $x \to x_0$ могу да размене места. Ускоро ћемо исту технику искористити да докажемо општу теорему о комутативности лимеса.

13.11. Коментар. Низ функција $f_n(x) = x^n$ из примера 13.2 очито не конвергира равномерно, јер би у том случају гранична функција била непрекидна, а она то није. Међутим, гранична функција је непрекидна (идентички је једнака нули) на $[0,1)$ што даје неку наду да тај низ равномерно конвергира на ужем скупу. На самом $[0,1)$ то није случај, јер је

$$\sup_{x\in[0,1)} |x^n - 0| = 1 \nrightarrow 0.$$

Међутим, већ на интервалу $[0, 1-\delta]$ тај низ равномерно конвергира, јер је

$$\sup_{x\in[0,1-\delta]} |x^n - 0| = (1-\delta)^n \to 0.$$

То значи да f_n локално равномерно конвергира на интервалу $[0,1)$, јер свака тачка из $[0,1)$ има околину облика $[0, 1-\delta]$.

13.12. Општа дефиниција. Нека је T непразан скуп, M метрички простор, и $f_\alpha : T \to M$ нека фамилија функција, $\alpha \in A$, где је A неки скуп са дефинисаном конвергенцијом. Може бити $A = \mathbf{N}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, метрички простор итд. Нека је α_0 тачка нагомилавања скупа A. (Појам тачке нагомилавања схватамо нешто слободније, па то може бити реалан број, симбол $+\infty$, $-\infty$, али и $a+$, $a-$, где је $a \in \mathbf{R}$, и уосталом све што поседује систем околина.)

Кажемо да f_α ***равномерно конвергира*** ка f, кад $\alpha \to \alpha_0$, на скупу $B \subseteq T$ ако важи

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists U \in \mathcal{O}_{\alpha_0} \; \forall \alpha \in U \; \forall t \in B \;\; d(f_\alpha(t), f(t)) < \varepsilon.$$

Понекад уместо $f_\alpha(t)$ пишемо и $f(\alpha, t)$. Већина теорема може се исказати и доказати у овом контексту. То посебно важи за Ставове 13.8 и 13.10.

Два Кошијева услова еквивалентна су равномерној конвергенцији фамилије функција f_α. Први од њих је онај који личи на дефиницију Кошијевог низа, и важи само под условом да је M комплетан метрички простор, и гласи

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists U \in \mathcal{O}_{\alpha_0}\ \forall\alpha,\beta \in U\ \forall t \in B\ \ d(f_\alpha(t), f_\beta(t)) < \varepsilon. \tag{4}$$

Да равномерна конвергенција повлачи (4) види се из неједнакости

$$d(f_\alpha(t), f_b(t)) \le d(f_\alpha(t), f(t)) + d(f_\beta(t), f(t)).$$

Обратно, ако важи (4), онда за фиксирано $t \in B$ пресликавање $\alpha \mapsto f_\alpha(t)$ испуњава Кошијев услов (обичан, не равномерни) у околини тачке α_0, па постоји $f(t) = \lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} f_\alpha(t)$, за сада само тачка по тачка. Да бисмо показали да је конврегенција равномерна, у последњој неједнакости формуле (4) пустимо $\beta \to \alpha_0$, и оно што добијемо је управо дефиниција равномерне конвергенције.

Други услов је налик Ставу 13.8 а) и гласи

$$f_\alpha \rightrightarrows f \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\alpha\to\alpha_0} \sup_{t\in B} d(f_\alpha(t), f(t)) = 0.$$

13.13. Теорема [о комутативности лимеса]. Нека су A и B скупови са дефинисаном конвергенцијом, $f : A \times B \to M$, M метрички простор. Ако је:

(i) $\lim\limits_{\alpha\to a} f(\alpha,\beta) = h(\beta)$;

(ii) $\lim\limits_{\beta\to b} f(\alpha,\beta) = g(\alpha)$ равномерно по α из неке фиксиране околине $U_0 \in \mathcal{O}_a$,

тада постоје и међусобно су једнаки

$$\lim_{\beta\to b} h(\beta), \quad \lim_{\alpha\to a} g(\alpha), \quad \lim_{(\alpha,\beta)\to(a,b)} f(\alpha,\beta),$$

то јест

$$\lim_{\alpha\to a}\lim_{\beta\to b} f(\alpha,\beta) = \lim_{\beta\to b}\lim_{\alpha\to a} f(\alpha,\beta) = \lim_{(\alpha,\beta)\to(a,b)} f(\alpha,\beta).$$

Овом приликом је конвергенција кад $(\alpha,\beta) \to (a,b)$ дефинисана као конвергенција система околина $\mathcal{O}_a \times \mathcal{O}_b = \{U \times V \mid U \in \mathcal{O}_a,\ V \in \mathcal{O}_b\}$.

Примедба: Прецизну, али донекле рогобатну формулацију ове теореме можемо препричати овако: Два лимеса могу да замене места ако бар један од њих конвергира равномерно по оној другој променљивој.

Доказ. 1° Прво ћемо доказати да $g(\alpha)$ задовољава Кошијев услов (4). Имамо

$$d(g(\alpha'), g(\alpha'')) \le d(g(\alpha'), f(\alpha',\beta)) + d(f(\alpha',\beta), f(\alpha'',\beta)) + d(f(\alpha'',\beta), g(\alpha'')).$$

Како $f(\alpha,\beta) \to g(\alpha)$ кад $\beta \to b$ равномерно по $\alpha \in U_0$ (улсов (ii)), то постоји околина V тачке b, таква да су за све $\beta \in V$ и све $\alpha', \alpha'' \in U_0$ први и трећи сабирак мањи од $\varepsilon/3$. Треба нам само једно $\beta_0 \in V$, јер за то, конкретно β_0, пресликавање $\alpha \mapsto f(\alpha,\beta_0)$ задовољава Кошијев услов (из услова (i)), па постоји околина U_1 трачке a тако да је други сабирак $d(f(\alpha',\beta_0), f(\alpha'',\beta_0))$ мањи од $\varepsilon/3$. Тако је за $\alpha',\alpha'' \in U_0 \cap U_1$, $d(g(\alpha'), g(\alpha'')) < \varepsilon$.

Одатле постоји

$$\gamma = \lim_{\alpha\to a} g(\alpha).$$

2° Доказаћемо, затим, да је γ уједно и лимес функције $h(\beta)$. Неједнакост

$$d(f(\alpha,\beta), g(\alpha)) < \varepsilon$$

важи, на основу услова (ii), за све $\beta \in V = V(\varepsilon)$ и све $\alpha \in U_0$. На ову неједнакост делујемо лимесом кад $\alpha \to a$, и добијамо $d(h(\beta), \gamma) \leq \varepsilon$, за све $\beta \in V$, и отуда

$$\lim_{\beta \to b} h(\beta) = \gamma.$$

3° На послетку, доказаћемо и да је заједнички лимес једнак γ. Имамо

$$d(f(\alpha, \beta), \gamma) \leq d(f(\alpha, \beta), g(\alpha)) + d(g(\alpha), \gamma) = S_1 + S_2.$$

Сабирак S_1 је мањи од $\varepsilon/2$ за све $(\alpha, \beta) \in U_0 \times V$, као у другом кораку, а $S_2 < \varepsilon/2$ за све $\alpha \in U_1$ (и наравно за све β, јер не зависи од β). Тако је за све $(\alpha, \beta) \in (U_0 \cap U_1) \times V$ испуњено

$$d(f(\alpha, \beta), \gamma) < \varepsilon.$$

□

СВОЈСТВА ГРАНИЧНЕ ФУНКЦИЈЕ

13.14. Став [непрекидност граничне функције]. Нека су T и M метрички простори, $\alpha \in A$ скуп са конвергенцијом, $a \in A'$. Ако је за све $\alpha \in U_0 \in \mathcal{O}_a$ функција f_α непрекидна, и ако $f_\alpha \rightrightarrows f$, кад $\alpha \to a$, тада је и гранична функција f непрекидна.

Доказ. Услови става могу се записати и овако

$$\lim_{t \to t_0} f_\alpha(t) = f_\alpha(t_0)$$

$$\lim_{\alpha \to a} f_\alpha(t) = f(t) \quad \text{равномерно по } t \in V \text{ неке околине тачке } t_0$$

Тиме су испуњени услови Теореме о комутативности лимеса, па имамо

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = \lim_{t \to t_0} \lim_{\alpha \to a} f_\alpha(t) = \lim_{\alpha \to a} \lim_{t \to t_0} f_\alpha(t) = \lim_{\alpha \to a} f_\alpha(t_0) = f(t_0).$$

□

13.15. Став [интеграл граничне функције]. Нека је $D \subseteq \mathbf{R}^k$ Жордан мерљив скуп, нека је $f_\alpha : D \to \mathbf{R}$, $\alpha \in A$ фамилија интеграбилних функција, и нека $f_\alpha(x) \rightrightarrows f(x)$ по $x \in D$, кад $\alpha \to a$. Тада је и f интеграбилна и важи

$$\lim_{\alpha \to a} \int_D f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \int_D f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Другим речима, ако је конвергенција равномерна на домену интеграције, онда лимес и интеграл могу заменити места.

Доказ. Нека је $\varepsilon > 0$ дато. Постоји околина $U \in \mathcal{O}_a$ таква да неједнакост

$$|f_\alpha(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{\lambda(D)}$$

важи за све $\alpha \in U$ и све $t \in D$. (Подсетимо се, $\lambda(D)$ је ознака за Жорданову меру скупа D). Та неједнакост се може записати и као

$$f_\alpha(t) - \frac{\varepsilon}{\lambda(D)} \leq f(t) \leq f_\alpha(t) + \frac{\varepsilon}{\lambda(D)}.$$

Одатле је после интеграције

$$\int_D f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t - \varepsilon \le \underline{\int}_D f(t)\,\mathrm{d}t \le \overline{\int}_D f(t)\,\mathrm{d}t \le \int_D f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon, \tag{5}$$

одакле је разлика горњег и доњег интеграла функције f мања од 2ε - дакле произвољно мала, па је f интеграбилна.

Даље, неједнакости (5) можемо записати и као

$$\int_D f(t)\,\mathrm{d}t - \varepsilon \le \int_D f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t \le \int_D f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon,$$

за све $\alpha \in U$, а то по дефиницији значи да је

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_D f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \int_D f(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Претходна два Става, показују како се својства непрекидности и интеграбилности преносе на граничну функцију. Са изводом ствари стоје нешто сложеније. Ту чак ни равнмерна конвергенција није довољна. Наиме, низ функција $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin nx$ из примера 13.3 равномерно конвергира ка нули, јер је

$$|f_n(x)| = \left|\frac{1}{n}\sin nx\right| \le \frac{1}{n},$$

али низ изводних функција $f_n'(x) = \cos nx$ је дивергентан. Међутим, следећи Став који даје довољне услове за комутативност лимеса и извода, отклања све недоумице.

13.16. Став [извод граничне функције]. Нека је $J \subseteq \mathbf{R}$ интервал, $f_\alpha : J \to \mathbf{R}$, $\alpha \in A$ фамилија диференцијабилних функција, a тачка нагомилавања скупа A и нека важи

(*i*) $f_\alpha(x_0)$, конвергира кад $\alpha \to a$, за неко $x_0 \in J$;

(*ii*) $f_\alpha'(x)$, конвергира кад $\alpha \to a$, локално равномерно на J ка $g(x)$.

Тада f_α конвергира локално равномерно на J ка некој диференцијабилној функцији f, и важи $f' = g$, односно

$$\left(\lim_{\alpha\to a} f_\alpha(x)\right)' = \lim_{\alpha\to a} f_\alpha'(x).$$

Доказ. Из ситног правила д) важи да $f_\alpha' \rightrightarrows g$ на компактима. Нека је K компактан интервал чија унутрашњост садржи $[x_0, x]$ (осносно $[x, x_0]$). Применом Лагранжове теореме о средњој вредности на функцију $f_\alpha - f_\beta$, за $x, y \in K$ налазимо

$$|f_\alpha(x) - f_\beta(x) - (f_\alpha(y) - f_\beta(y))| = |f_\alpha'(\xi) - f_\beta'(\xi)| \cdot |x - y|, \tag{6}$$

за неко ξ између x и y.

Ставимо $y = x_0$ (и то оно x_0 из услова (*i*)) и добијамо

$$|f_\alpha(x) - f_\beta(x)| \le |f_\alpha'(\xi) - f_\beta'(\xi)| \cdot |x - x_0| + |f_\alpha(x_0) - f_\beta(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2\lambda(K)}|x - x_0| + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

јер f_α' испуњава равномерно Кошијев услов (4) на K, а $f_\alpha(x_0)$ је фамилија бројева која такође испуњава Кошијев услов. Отуда $f_\alpha(x)$ конвергира равномерно на K, односно f_α конвергира локално равномерно некој функцији f.

Ако (6) поделимо са $|x-y|$, и ставимо $y = x+h$ налазимо

$$\left|\frac{f_\alpha(x+h)-f_\alpha(x)}{h} - \frac{f_\beta(x+h)-f_\beta(x)}{h}\right| = |f'_\alpha(\xi) - f'_\beta(\xi)| < \varepsilon,$$

равномерно по $h \in U$, где је U таква околина нуле, да f'_α равномерно конвергира у околини $x+U$ тачке x. Преласком на лимес $\beta \to a$ добијамо

$$\left|\frac{f_\alpha(x+h)-f_\alpha(x)}{h} - \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \le \varepsilon,$$

односно

$$\lim_{\alpha\to a} \frac{f_\alpha(x+h)-f_\alpha(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

равномерно по h из неке околине нуле U. Како је још

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_\alpha(x+h)-f_\alpha(x)}{h} = f'_\alpha(x)$$

за све α (не обавезно равномерно) то на последња два лимеса можемо применити Теорему о комутативности лимеса, и стога је

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\lim_{\alpha\to a}\frac{f_\alpha(x+h)-f_\alpha(x)}{h} = \\ = \lim_{\alpha\to a}\lim_{h\to 0}\frac{f_\alpha(x+h)-f_\alpha(x)}{h} = \lim_{\alpha\to a} f'_\alpha(x) = g(x).$$

□

Примедба: Да би лимес и извод заменили места, не тражимо равномерну конвергенцију полазне фамилије, већ фамилије извода. Ово је логично, јер је извод операција супротна интегралу. И више, када бисмо претпоставили да је f'_α интеграбилна за све α онда бисмо имали краћи и ефектнији доказ. Наиме, из Њутн Лајбницове формуле, имамо

$$f_\alpha(x) = f_\alpha(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'_\alpha(t)\,\mathrm{d}t,$$

па Став 13.15 можемо применити на фамилију f'_α и Жордан мерљив скуп $[x_0, x] \subseteq \mathbf{R}$. Нажалост, постоје диференцијабилне функције са неинтеграбилним изводом.

Још једна примедба: Сви ставови претходног одељка дају *довољне* а не и потребне услове. И више, постоји много примера где је гранична функција непрекидна или лимес интеграла једнак интегралу лимеса итд, а да при томе конвергенција није равномерна.

РАВНОМЕРНА КОНВЕРГЕНЦИЈА РЕДОВА

13.17. Дефиниција. Нека је $f_n : A \to M \subseteq \mathbf{R}^k$ (или $M \subseteq \mathbf{C}$, јер $\mathbf{C}$ можемо поистоветити са $\mathbf{R}^2$) неки низ функција. Кажемо да ред функција

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \tag{7}$$

конвергира равномерно, ако низ делимичних сума $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ конвергира равномерно.

Ако је још A метрички простор, онда кажемо да ред (9) конвергира локално равномерно ако низ делимичних сума s_n конвергира локално равномерно.

Подсетимо се да ред (9) *апсолутно конвергира* ако конвергира ред

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ||f_n(x)||. \tag{8}$$

Лако се види, из Кошијевог услова, да апсолутна конвергенција повлачи обичну. Наиме, ако S_n означава делимичну суму реда (8) онда применом неједнакости многоугла имамо $||s_m - s_n|| \leq S_m - S_n$. (Обратимо пажњу да је ред (8) ред са позитивним члановима).

Ако ред (8) равномерно конвергира, онда кажемо да полазни ред (9) *нормално конвергира.* Како свака равномерна конвергенција повлачи конверенцију тачка по тачка, и како апсолутна повлачи обичну то између различитих врста конвергенција имамо следећу везу

$$\begin{array}{ccc} & \text{нормална} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \text{апсолутна} & & \text{равномерна} \\ \searrow & & \swarrow \\ & \text{обична} & \end{array}$$

Ни за једну од тих импликација не важи обрат. И више, апсолутна и равномерна заједно не повлаче нормалну, што се види из наредног примера. То уједно оправдава увођење норвог назива нормална конвергенција уместо апсолутно равномерна.

13.18. Пример. Ред

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}$$

конвергира апсолутно за $x \in [0,1]$, и конвергира равномерно по $x \in [0,1]$. Међутим ред

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n} \right|$$

не конвергира равномерно.

Заиста, тај ред је геометријски ред са количником $-1/(1+x^2)$ помножен са x, и његова сума једнака је

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = x \frac{1}{1 + \dfrac{1}{1+x^2}} = \frac{x(1+x^2)}{2+x^2}.$$

Остатак реда (односно разлика између збира и n-те делимичне суме) је

$$R_n(x) = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k x}{(1+x^2)^k}\right| = \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \left|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x}{(1+x^2)^k}\right| =$$

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{n+1} \left|\frac{x(1+x^2)}{2+x^2}\right| = \frac{x}{(2+x^2)(1+x^2)^n}.$$

Отуда је

$$|R_n(x)| \le \frac{x}{(1+x^2)^n} = \varphi_n(x).$$

Једноставним рачунањем извода налази се да функција φ_n достиже максимум на интервалу $[0,1]$ у тачки $1/\sqrt{2n-1}$, па је

$$|R_n(x)| \le \varphi_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \cdot \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{2n-1}\right)^n} \to 0,$$

одакле ред равномерно конвергира.

Апсолутна конвергенција реда је очигледна, јер је опет реч о геометријском реду. Његова сума је

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{1-\dfrac{1}{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{x},$$

за $x \ne 0$, док је једнака 0 за $x = 0$. Дакле, гранична функција није непрекидна, па конвергенција не може бити равномерна.

КРИТЕРИЈУМИ РАВНОМЕРНЕ КОНВЕРГЕНЦИЈЕ

Има много ситуација када не можемо експлицитно да одредимо граничну функцију, а потребно је да закључимо да ли је конврегенција равномерна. Оне су посебно честе у случају редова. Стога у овом одељку разматрамо различите довољне услове за равномерну конвергенцију.

13.19. Динијев критеријум. Нека је $f_n : T \to \mathbf{R}$, T компактан метрички простор, f_n монотон низ (то јест $f_n(t) \le f_{n+1}(t)$ или $f_n(t) \ge f_{n+1}(t)$, за све $t \in T$, и $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = f(t)$. Ако су све f_n и f непрекидне, онда $f_n \rightrightarrows f$ на T.

Посебно, ако су у реду $\sum g_n(t)$ све функције позитивне и гранична функција непрекидна, онда ред равномерно конвергира на компактним скуповима. Наиме, тада је низ парцијалних сума монотоно растући.

Доказ. Нека је, на пример, f_n растући низ. За дато $\varepsilon > 0$ посматрајмо скупове

$$F_n = \{t \in T \mid f_n(t) \le f(t) - \varepsilon\}.$$

Ови су скупови затворени, јер су f_n и f непрекидне, а тиме и функција $g_n = f - f_n - \varepsilon$, а F_n се може приказати као $g_n^{-1}([0,+\infty))$. Због монотоније низа f_n

је $F_n \supseteq F_{n+1}$. Даље

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n = \{t \in T \mid \forall n \; f_n(t) \leq f(t) - \varepsilon\} = \emptyset,$$

јер $f_n \to f$, т.п.т. Зато, и због компактности простора T (види Теорему 9.21) постоји $n \in \mathbf{N}$ такав да је $F_n = \emptyset$. Но тада је за свако $t \in T$ испуњено

$$f(t) - \varepsilon < f_n(t) \leq f(t) < f(t) + \varepsilon,$$

и због монотоније, ето равномерне конвергенције.

У случају да је низ опадајући, претходно ваља применити на низ $-f_n$. □

Примедба: Став важи и када је фамилија функција индексирана неким подскупом скупа $\mathbf{R}$, уз незнатне измене у доказу. Ову општију варијанту Динијевог критеријума користићемо у извођењу Стирлингове формуле 14.16.

13.20. Вајерштрасов критеријум. Нека $f_n : T \to \mathbf{R}^k$, T непразан скуп, нека је $||f_n(x)|| \leq a_n$ и нека ред $\sum a_n$ конвергира. Тада ред

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \tag{9}$$

нормално конвергира. Посебно, он равномерно конвергира.

Доказ. Доказаћемо да за низ делимичних сума $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} ||f_n(x)||$ важи Кошијев услов (4). Имамо

$$s_m(x) - s_n(x) = \sum_{k=n+1}^{m} ||f_k(x)|| \leq \sum_{k=n+1}^{m} a_k < \varepsilon,$$

равномерно по x, за довољно велике $m > n$. □

13.21. Став. Нека су T и M метрички простори, $A \subseteq T$ и $f_\alpha : \overline{A} \to M$ непрекидне функције, и нека је

$$\lim_{\alpha \to a} f_\alpha(t) = f(t)$$

за све $t \in A$.

Ако фамилија $f_\alpha(t_0)$ дивергира за неко $t_0 \in \overline{A}$ тада фамилија f_α не конвергира равномерно на A.

Посебно, ако фамилија непрекидних функција $f_\alpha(x)$ дивергира за $x = b$, онда f_α не може равномерно да конвергира на $[a, b)$.

Доказ. Претпоставимо супротно. Тада
$\lim\limits_{\alpha \to a} f_\alpha(t) = f(t)$, равномерно по $t \in A$, и
$\lim\limits_{t \to t_0} f_\alpha(t) = f_\alpha(t_0)$, за све α.

Тада, из теореме о комутативности лимеса излази да постоји $\lim\limits_{\alpha \to a} f_\alpha(t_0)$, а то је контрадикција. □

13.22. Став [Абелов и Дирихлеов критеријум]. Нека је A непразан скуп, и $f_n, g_n : A \to \mathbf{R}$, и нека је g_n монотон низ. Ако је испуњен било који од следећих услова

(А) Ред $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ равномерно конвергира по $x \in A$, и важи $|g_n(x)| \leq M$, при чему M не зависи од x (то јест низ g_n је равномерно ограничен);

(Д) Низ делимичних сума $F_k(x) = \sum_{j=1}^{k} f_j(x)$ је равномерно ограничен (то јест $|F_k(x)| \leq M$, где M не зависи од x), а $g_n(x) \rightrightarrows 0$, кад $n \to +\infty$,

онда ред

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_n(x) g_n(x)$$

равномерно конвергира.

Примедба: Заправо, исказ овог става се може добити од исказа Абеловог и Дирихлеовог критеријума за обичну конврегенцију редова, и то тако што се свуда, и у претпоставкама и у закључку дода реч „равномерно“.

Доказ. Као и код бројних редова, пођимо од формуле за делимичну сумацију

(10)
$$\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) g_k(x) = F_{n+p}(x) g_{n+p}(x) - F_{n-1}(x) g_n(x) - \sum_{k=n}^{n+p-1} F_k(x)(g_{k+1}(x) - g_k(x))$$

Ако важи услов (А), тада после још мало рачуна налазимо

(11)
$$\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) g_k(x) = (F_{n+p}(x) - F_{n-1}(x)) g_{n+p}(x) - \sum_{k=n}^{n+p-1} (F_k(x) - F_{n-1}(x))(g_{k+1}(x) - g_k(x)).$$

Знамо да је $|g_n(x)| \leq M$. Из равномерне конвергенције реда $\sum f_k$ што је исто што и равномерна конвергенција низа F_k налазимо да за дато $\varepsilon > 0$ постоји n_0, такво да за све $k \geq n > n_0$ и све $x \in A$ важи

$$|F_k(x) - F_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Тада из (11) налазимо

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) g_k(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3M} M + \frac{\varepsilon}{3M} \sum_{k=n}^{n+p-1} |g_{k+1}(x) - g_k(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

У последњем прелазу искористили смо чињеницу да је низ g_n монотон, па су разлике $g_{k+1}(x) - g_k(x)$ сталног знака, те се модуо може избацити ван суме.

Ако важи (Д), тада је $|F_k(x)| \leq M$, а за дато $\varepsilon > 0$ постоји n_0 такво да за $k \geq n_0$ имамо $|g_k(x)| \leq \varepsilon / 4M$, па из (10) налазимо

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) g_k(x) \right| \leq M \frac{\varepsilon}{4M} + M \frac{\varepsilon}{4M} + M(|g_{k+p}(x)| + |g_n(x)|) < \varepsilon.$$

У оба случаја испуњен је Кошијев услов (4), па ред равномерно конвергира. $\square$

Примедба: Конвергенција реда са члановима који припадају $\mathbf{R}^k$, своди се на конвергенцију k редова са реалним члановима, добијених узимањем координата. Тако Абелов и Дирихлеов критеријум остају на снази и када функције f_n имају вредности у $\mathbf{R}^k$ или $\mathbf{C}$.

СТЕПЕНИ РЕДОВИ, АНАЛИТИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ

13.23. Дефиниција. Ред облика

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\alpha)^n \tag{12}$$

називамо *степени ред.* Делимичне суме степеног реда су полиноми степена n. Теорију степених редова можемо посматрати у оквиру реалних или комплексних бројева. У првом случају претпостављамо да $x, \alpha, a_n \in \mathbf{R}$, а у другом $x, \alpha, a_n \in \mathbf{C}$. Ако желимо да нагласимо у ком контексту радимо ред (12) називамо, редом, *реални*, односно *комплексни степени ред.*

Област конвергенције реда (12) означаваћемо са D.

Број $R \in [0, +\infty]$ одређен једнакошћу

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \tag{13}$$

назива се *полупречник конвергенције* степеног реда. Разлог за тај назив лежи у следећем Ставу.

Примедба: Ако постоји лимес $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n/a_{n+1}|$ онда је он једнак R, што се види из вежбања 2 поглавља Низови. То омогућава да се у појединим случајевима лакше одреди полупречник конвергенције.

13.24. Став [Коши-Адамар]. Ако је $|x-\alpha| < R$ онда ред (12) апсолутно конвергира, а ако је $|x-\alpha| > R$, онда дивергира.

У реалном случају то значи да је $(\alpha - R, \alpha + R) \subseteq D \subseteq [\alpha - R, \alpha + R]$, односно да је област конвергенције степеног реда одређена до на две тачке. У комплексном случају то значи да је $K(\alpha, R) \subseteq D \subseteq K[\alpha, R]$, па је скуп тачака у којима на основу овог Става не знамо да ли степени ред конвергира нешто већи.

Доказ. Нека је $|x-\alpha| < R$. Због (13), за довољно велико n и произвољно $\varepsilon > 0$, биће испуњено $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/R + \varepsilon$, па имамо

$$\sqrt[n]{|a_n(x-\alpha)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}\,|x-\alpha| < \left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)|x-\alpha| < 1,$$

за $\varepsilon < \frac{1}{|x-\alpha|} - \frac{1}{R}$, а такве ε је могуће пронаћи јер је последњи израз строго позитиван. Тако ред (12) апсолутно конвергира на основу Кошијевог кореног критеријума.

Нека је сада $|x-\alpha| > R$. Из (13) постоји подниз низа $\sqrt[n]{|a_n|}$ који конвергира ка $1/R$. Отуда за чланове тог подниза важи

$$\sqrt[n]{|a_n(x-\alpha)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}\ |x-\alpha| \to \frac{1}{R}|x-\alpha| > 1,$$

па је бесконачно много чланова низа $|a_n(x-\alpha)^n|$ веће од 1, па ред (12) дивергира. $\square$

13.25. Став. а) Ако ред (12) конвергира за $x=\alpha+R$, онда он равномерно конвергира по $x\in[\alpha,\alpha+R]$;

б) Ако ред (12) конвергира за $x=\alpha+R$ тада је

$$\lim_{x\to\alpha+R-}\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-\alpha)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(\alpha+R-\alpha)^n;$$

в) Степени ред конвергира локално равномерно на свом домену.

Тврђење у тачки б) познато је под називом *Абелова теорема.*

Овај Став специфичан је за реални контекст. Како се он може пренети у комплексни контекст описано је у вежбању 16.

Доказ. а) Имамо

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-\alpha)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nR^n\left(\frac{x-\alpha}{R}\right)^n.$$

Ред $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nR^n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(\alpha+R-\alpha)^n$ конвергира равномерно по x јер не зависи од x, а низ $(\frac{x-\alpha}{R})^n$ је монотоно опадајући и по модулу не превазилази 1, па закључак следи на основу Абеловог критеријума;

б) Из равномерне конвергенције коју смо утврдили у претходној тачки и Теореме 13.13 о комутативности лимеса налазимо да лимеси кад $x\to\alpha+R-$ и $n\to+\infty$ (лимес низа делимичних сума) могу да размене места, па је

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\alpha+R-}\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-\alpha)^n&=\lim_{x\to\alpha+R-}\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}a_n(x-\alpha)^n=\\&=\lim_{N\to+\infty}\lim_{x\to\alpha+R-}\sum_{n=0}^{N}a_n(x-\alpha)^n=\\&=\lim_{N\to+\infty}a_n(\alpha+R-\alpha)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(\alpha+R-\alpha)^n;\end{aligned}$$

в) Јасно је да важе тврдње аналогне онима под а) и б), само што стоји друга рубна тачка домена $\alpha-R$. Докажимо још да за свако $\rho<R$ ред (12) конвергира равномерно на $[\alpha-\rho,\alpha+\rho]$. То ћемо учинити на основу Вајерштрасовог критеријума. Наиме, за $x\in[\alpha-\rho,\alpha+\rho]$ важи

$$|a_n(x-\alpha)^n|\le|a_n|\rho^n,$$

а ред са општим чланом $|a_n|\rho^n$ конвергира јер је то општи члан степеног реда $\sum|a_n|y^n$ у тачки $\rho<R$, а чији је полупречник конвергенције такође једнак R.

Ово је довољно за доказ, јер се равномерна конвергенција преноси са нека два скупа на њихову унију (Став 13.8 г)), па следи да ред (12) конвергира равномерно на сваком интервалу облика $[a,b]$ који је садржан у области конвергенције D. Како свака тачка из D има околину облика $[a,b]$ то закључујемо локално равномерну конвергенцију. $\square$

13.26. Став. а) У унутрашњости области конвергенције $\operatorname{int} D$, то јест у $(\alpha - R, \alpha + R)$ важи

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-\alpha)^n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n (x-\alpha)^{n-1};$$

б) Функција дефинисана степеним редом (12) је бесконачно диференцијабилна (класе C^∞) у унутрашњости области конвергенције $\operatorname{int} D$. Њен k-ти извод једнак је

$$\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n (x-\alpha)^{n-k};$$

в) За сваки интервал $[a,b] \subseteq D$ важи

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-\alpha)^n \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n (x-\alpha)^n \, \mathrm{d}x.$$

Доказ. а) Изводни ред

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n (x-\alpha)^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-\alpha)^{n-1} \tag{14}$$

има исти полупречник конвергенције као и полазни, јер $\sqrt[n]{n} \to 1$, кад $n \to +\infty$, па према Ставу 13.25 в) конвергира локално равномерно у $(\alpha - R, \alpha + R)$. Резултат сада следи на основу Става 13.16;

Примедба: Наравно изводни ред може да дивергира у крајевима $\alpha \pm R$, чак и када ту полазни ред конвергира, јер онај фактор n ипак доноси неку тежину.

б) Изводни ред (14) је такође степени ред са истим полупречником конвергенције. Ако на њега применимо претходну тачку Става, налазимо да постоји други извод, и да је и он задат помоћу неког степеног реда. Даље индукцијом;

в) На интервалима облика $[a,b] \subseteq D$ ред (12) конвергира равномерно према Ставу 13.25 в), па се може применити Став 13.15 о размени места лимеса и интеграла. $\square$

13.27. Дефиниција. Нека је $A \subseteq \mathbf{R}$ отворен интервал. Функција $f : A \to \mathbf{R}$ се назива *аналитичка*, ако је једнака збиру неког степеног реда у околини сваке тачке $\alpha \in A$. Прецизније, ако за све $\alpha \in A$ постоје коефицијенти a_n и $\varepsilon > 0$ такви да важи једнакост

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-\alpha)^n, \qquad \text{за све } x \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon). \tag{15}$$

Прена претходном Ставу (тачка б)) јасно је да је свака аналитичка функција бесконачно диференцијабилна. Такође из (15) и (14) јасно је да је $f^{(k)}(\alpha) = k! a_k$, односно да је ред у (15) јединствен, и да се коефицијенти добијају као $a_k = f^{(k)}(\alpha)/k!$. Такав ред, односно ред

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (x-\alpha)^n,$$

називамо *Тејлоров ред* функције f у околини тачке α (или краће у α). То је у ствари гранична вредност низа Тејлорових полинома. Ако је $\alpha = 0$ онда Тејлоров ред често зовемо и *Маклоренов ред.*

Терминолошка примедба: Дотични математичар се није звао Маклорен, већ Меклорин (MacLaurin) шкотски математичар. Међутим, већина наших математичара која је уводила терминологију школовала се на француском говорном подручју па се код нас одомаћио погрешан изговор Маклорен. Слично и Халејева комета је заправо Хејлијева комета, итд.

Следећи став даје потребне и довољне услове аналитичности.

13.28. Став. Нека је $f : A \to \mathbf{R}$ C^∞ функција, и нека $\alpha \in A$. Следећа два услова су међусобно еквивалентна:

1° Постоје $K > 0$ и $\delta > 0$, такви да неједнакост

$$|f^{(n)}(x)| \leq n!K^n, \tag{16}$$

важи равномерно по $x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$;

2° $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$, за $x \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$.

Доказ. 1° $\Rightarrow$ 2°) Из (16) и из Тејлорове формуле са остатком у Лагранжовом облику имамо

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1} \right| \leq$$

$$\leq \frac{(n+1)!K^{n+1}}{(n+1)!}|x-\alpha|^{n+1} \to 0,$$

за $|x - \alpha| < \varepsilon = 1/M$, па ред конвергира ка $f(x)$;

2° $\Rightarrow$ 1° Ако ред конвергира у $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ тада из Коши Адамарове формуле имамо

$$\frac{1}{\varepsilon} \geq \frac{1}{R} = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(\alpha)|}{n!}},$$

па за $K > 1/\varepsilon$ добијамо

$$|f^{(n)}(\alpha)| \leq K^n n!.$$

Даље, за $x \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ узастопном применом Става 13.26, имамо

$$|f^{(k)}(x)| = \left| \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^{n-k} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\frac{|f^{(n)}(\alpha)|}{n!}|x-\alpha|^{n-k} \leq$$

$$\leq \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)K^n|x-\alpha|^{n-k} =$$

$$\leq K^k \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)(K|x-\alpha|)^{n-k}.$$

Последњи ред је, међутим k-ти извод функције $q \mapsto \frac{1}{1-q}$ израчунат у тачки $K|x-\alpha| < 1$. Како је $(1/(1-q))^{(k)} = (k-1)!/(1-q)^k$, то је

$$|f^{(k)}(x)| \leq \left(\frac{K}{1-K|x-\alpha|}\right)^k (k-1)! \leq (2K)^k (k-1)! \leq (2K)^k k!,$$

за $|x-\alpha| < 1/2K$. □

13.29. Пример. Функција $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ дата са

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

је бесконачно диференцијабилна (то јест $\in C^\infty(\mathbf{R})$), али није аналитичка.

Заиста, индукцијом се може доказати да је n ти извод фунције f за $x > 0$ једнак

$$f^{(n)}(x) = \frac{P(x)}{x^{2n}} e^{-1/x},$$

где је P нека полиномска функција. Отуда се једноставно види да је $\lim\limits_{x\to 0+} f^{(n)}(x) = 0$, а како је и леви лимес очигледно једнак нули, то из Става 5.14 следи $f^{(n)}(0) = 0$. Отуда је збир њеног Маклореновог реда у нули једнак 0, а то је различито од $f(x)$ у свакој ε околини нуле.

НЕКЕ ЗАНИМЉИВЕ ФУНКЦИЈЕ

13.30. Риманова ζ-функција. То је функција $\zeta : (1, +\infty) \to \mathbf{R}$ задата са

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}. \tag{17}$$

Ред (17) очигледно конвергира ако и само ако је $x > 1$ (видети основни ред, параграф 4.11). Шатвише, тај ред конвергира локално равномерно. Наиме, он конвергира равномерно по $x \in (1+\delta, +\infty)$ на основу Вајерштрасовог критеријума, јер

$$\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^{1+\delta}},$$

а ред са општим чланом $1/n^{1+\delta}$ конвергира. С друге стране свако $x \in (1, +\infty)$ има околину облика $(1+\delta, +\infty)$ (на пример за $\delta = (x-1)/2$. Отуда је, према Ставу 13.14, гранична функција непрекидна.

Дакле ζ-функција је непрекидна.

Сви сабирци $1/n^x$ су степене функције са основом $1/n \leq 1$, па су опадајуће и конвексне. Зато су такве и делимичне суме реда (17), па и њихова гранична вредност.

Дакле, ζ функција је опадајућа и конвексна.

Даље, важе резултати

$$\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 1+} \zeta(x) = +\infty.$$

Заиста, због равномерне конвергенције на интервалу облика $(2, +\infty)$ због теореме о комутатовности лимеса, имамо

$$\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x} = 1.$$

С друге стране, истом техником као и у доказу Кошијевог интегралног критеријума, налазимо

$$\zeta(x) \geq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x-1},$$

одакле следи други лимес.

Индукцијом се може доказати да за k-ти извод ζ-функције важи

$$\zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\log n)^k}{n^x}.$$

Наиме, горњи ред локално равномерно конвергира. Тачније конвергира равномерно на $(1+\delta, +\infty)$ јер је

$$\left|\frac{(-\log n)^k}{n^x}\right| \leq \frac{\log^k n}{n^{1+\delta}},$$

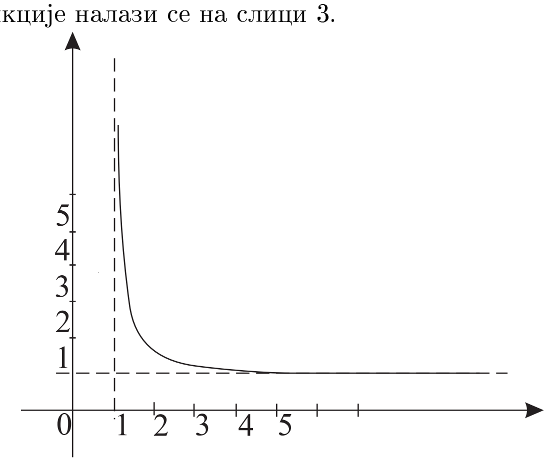
па се може применити Став 13.16.

Неке конкретне вредности ζ-функције могу се израчунати применом Фуријеових редова, на пример

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90},$$

о чему видети вежбање 2, у глави Фуријеови редови.

График ζ-функције налази се на слици 3.



Слика 3

13.31. ζ-функција и прости бројеви. Нека P означава скуп свих простих бројева. Тада важи једнакост

$$\zeta(x) = \prod_{p\in P} \left(1 - \frac{1}{p^x}\right)^{-1}. \tag{18}$$

Доказ. Како је $1/p^x < 1$ (јер је $x > 1$), то важи развој у геометријски ред

$$\left(1 - \frac{1}{p^x}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^{kx}},$$

који је апсолутно конвергентан. Нека је $q \in P$ фиксиран. Посматрајмо производ

$$\prod_{P \ni p \leq q} \left(1 - \frac{1}{p^x}\right) = \prod_{P \ni p \leq q} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^{kx}}. \tag{19}$$

Како су редови апсолутно конвергентни, они се могу члан по члан измножити, и добијени чланови се могу прегруписати. Тако се добија збир чији су сабирци једнаки $\dfrac{1}{p_1^{k_1 x} \dots p_l^{k_l x}}$, где су $p_1, \dots, p_l$ прости бројеви мањи или једнаки од q, а $k_1, \dots, k_l$ природни. Према основној теореми аритметике, сваки природан број се може на јединствен начин приказати као производ простих. Отуда се у измноженом производу (19) налазе сабирци облика $1/n^x$, и сви су међу собом различити. И више од тога, међу њима се налазе сви они који одговарају природним бројевима мањим од q. Тако је

$$0 \leq \zeta(x) - \prod_{P \ni p \leq q} \left(1 - \frac{1}{p^x}\right)^{-1} \leq \sum_{m=q+1} \frac{1}{m^x},$$

а последња сума тежи ка нули, кад $q \to +\infty$, јер је то остатак конвергентног реда. □

Претходна фомрула која установљава везу између ζ-функције и простих бројева полазна је тачка небројеним применама ζ-функције у теорији бројева.

Напоменимо и да ред којим се дефинише ζ-функција (17), конвергира и ако се уместо $x > 1$ узме комплексан број z такав да је $\mathrm{Re}\, z > 1$. За такве комплексне z важи и формула (18). Докази су исти. Међутим, ζ-функција се путем такозваног аналитичког продужења, може на јединствен начин продужити и на тачхке лево од праве $\mathrm{Re}\, x = 1$. Заправо у целу комплексну раван, осим у тачку 1.

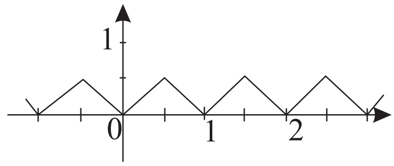
Најпознатији нерешен математички проблем везан је за ζ-функцију. Познат је под именом *Риманова хипотеза*, и везан је за одређивање нула комплексне ζ-функције. Познато је да се ζ функција анулира у негативним парним борјевима $-2, -4, -6, \dots$. Риманова хипотеза претпоставља да су све остале нуле ζ-функције смештене на правој $\mathrm{Re}\, z = 1/2 + it$.

13.32. Вајерштрасова функција. У овом параграфу конструисаћемо функцију која је непрекидна у свакој тачки, а није диференцијабилна ни у јеној тачки свог домена.

Нека је $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\psi(x) = d(x, \mathbf{Z})$ растојање до најближег целог броја, односно

$$\psi(x) = \begin{cases} x - n, & n \leq x \leq n + 1/2 \\ n - x, & n - 1/2 \leq x \leq n \end{cases}.$$

Та фунција је периодична са периодом 1. Њен график има облик тестере и приказан је на слици 4.



Слика 4

Вајерштрасову функцију дефинишемо као

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n}\psi(4^n x).$$

Сви сабирци су непрекидне функције, а ред равномерно конвергира, према Вајерштрасовом критеријуму, јер је

$$\frac{1}{4^n}\psi(4^n x) \le \frac{1}{4^n}.$$

Према Ставу 13.14, онда је и гранична функција f непрекидна.

Доказаћемо да f није диференцијабилна ни у једној тачки. Нека је $x_0 \in \mathbf{R}$ произвољно. Постоји цео број s_n такав да важе неједнакости

$$\alpha_n = \frac{s_n}{2\cdot 4^n} \le x_0 < \frac{s_n+1}{2\cdot 4^n} = \beta_n,$$

и може се добити као $s_n = [2\cdot 4^n x_0]$. Интервал $[\alpha_n, \beta_n]$ има дужину $1/(2\cdot 4^n)$ и у њему се засигурно може наћи неки $x_n \in [\alpha_n, \beta_n]$ такав да је $|x_n - x_0| = 1/4^{n+1}$. Очигледно, низ $x_n \to x_0$. За дифернецијални количник имамо

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k}\frac{\psi(4^k x_n)-\psi(4^k x_0)}{x_n-x_0}.$$

Доказаћемо да овај израз дивергира кад $n \to +\infty$. Наиме, ако је $k > n$, тада је $|4^k x_n - 4^k x_0| = 4^{k-n-1}$, што је цео број па се сабирак у горњем реду анулира због периодичности функције ψ. Ред се тако своди на коначну суму. Ако је $k \le n$, онда се $4^k x_n$ и $4^k x_0$ налазе између целог и полуцелог броја. Да би се то видело довољно је показати да унутрашњост интервала $[4^k\alpha_n, 4^k\beta_n]$ не садржи ни цео ни полуцео број. Претпоставимо супротно, да за неки цео број l, његова половина $l/2 \in [4^k\alpha_n, 4^k\beta_n]$. Тада је $s_n < l4^{n-k} < s_n + 1$ што је немогуће. Дакле, $4^k x_n$ и $4^k x_0$ припадају неком сегменту чији су крајеви цео и полуцео број, а функција ψ је на том сегменту линеарна, па је

$$\frac{\psi(4^k x_n)-\psi(4^k x_0)}{x_n-x_0} = \pm\frac{4^k x_n - 4^k x_0}{x_n-x_0},$$

и отуда је

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = \sum_{k=0}^{n}(\pm 1),$$

а то је низ који не може да буде конвергентан, јер су му суседни чланови на растојању један. Према Хајнеовој теореми тада не постоји

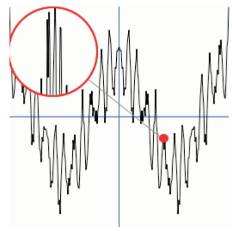
$$\lim_{y\to x_0}\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}.$$

Примедба: На први поглед могло би се помислити да је недиференцијабилност Вајерштрасове функције последица умножавања врхова тестере. Међутим то није тако, реч је о суперпонирању осцилација. Уосталом, оригиналан Вајерштрасов резултат био је да је функција

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

непрекидна и нигде диференцијабилна, ако је $0 < a < 1$ и b позитиван непаран број, такав да је $ab > 1 + 3\pi/2$. Идеја доказа је веома слична, али је у примеру који наводимо техника једноставнија.

Још једна примедба: Тешко је замислити график Вајерштрасове функције. То би требало да буде линија, која се црта једним потезом руке (због непрекидности) али таква да у свакој тачки има шпиц (због недиференцијабилности). Визуелизацију ове функције донекле олакшава податак да она има фрактално својство. Наиме, важи $f(4x) = 4f(x) - \psi(x)$, па један делић њеног графика личи на график читаве функције. Видети слику 5.



Слика 5

13.33. Γ-функција. Гама функцију дефинишемо као јединствену функцију $\Gamma : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ која има следеће три особине:

(i) $\Gamma(1) = 1$;

(ii) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$;

(iii) $\log \Gamma(x)$ је конвексна функција.

Таква функција постоји и може се добити као

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t. \tag{20}$$

Функција је коректно дефинисана, јер за све $x > 0$ интеграл конвергира, у бесконачној тачки јер је $t^{x-1}e^{-t} = o(e^{-t/2})$, а у нули, јер је $t^{x-1}e^{-t} \sim t^{x-1}$. Позитивност је очигледна. Покажимо да тако одређена функција заиста задовољава особине $(i) - (iii)$.

(i) $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$;

(ii) Применом парцијалне интеграције имамо

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = -t^x e^{-t}\big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t} x t^{x-1}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x);$$

(iii) Нека је $\theta \in (0,1)$ и $p = 1/\theta$, $q = 1/(1-\theta)$. Тада је $1/p + 1/q = 1$ па применом Хелдерове неједнакости налазимо

$$\Gamma(\theta x + (1-\theta)y) = \Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) = \int_0^{+\infty} t^{(x-1)/p} t^{(y-1)/q} e^{-t/p} e^{-t/q}\,\mathrm{d}t \leq$$

$$\leq \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^{1/p} \left(\int_0^{+\infty} t^{y-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^{1/q} = \Gamma(x)^{1/p}\Gamma(y)^{1/q},$$

одакле логаритмовањем добијамо

$$\log \Gamma(\theta x + (1-\theta)y) \leq \frac{1}{p}\log\Gamma(x) + \frac{1}{q}\log\Gamma(y) = \theta\log\Gamma(x) + (1-\theta)\log\Gamma(y).$$

13.34. Јединственост Γ-функције. Ојлерова формула. Што се тиче јединствености, поступићемо овако.

За почетак приметимо да из особина (i) и (ii) следи да за природан број n важи

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = (n-1)!\Gamma(1) = (n-1). \tag{21}$$

На сличан начин, за $0 < x < 1$ и $n \in \mathbf{N}$ имамо

$$\Gamma(n+x) = (n-1+x)\dots x\Gamma(x). \tag{22}$$

Даље, нека је $g(x) = \log \Gamma(x)$, нека је $0 < x < 1$ и n природан број. Тачка $n+x$ налази се између тачака n и $n+1$ и може се приказати као њихова конвексна комбинација, и то

$$n + x = (1-x)n + x(n+1).$$

Због конвексности функције g одатле је

$$g(n+x) \leq (1-x)g(n) + xg(n+1),$$

а како је, због (21) $g(n) = \log(n-1)!$, то имамо

$$\log \Gamma(n+x) = g(n+x) \leq (1-x)\log(n-1)! + x\log n! = \log(n-1)! + \log n^x,$$

то јест

$$\Gamma(n+x) \leq (n-1)!n^x,$$

што се због (22) своди на

$$\Gamma(x) \leq \frac{(n-1)!n^x}{x(x+1)\dots(x+n-1)}.$$

Слично разматрање применимо на тројку тачака $n+x$, $n+1$ и $n+x+1$. Тада је

$$n+1 = x(n+x) + (1-x)(n+x+1),$$

а због конвексности функције g и

$$\begin{aligned}
\log n! = g(n+1) \leq & xg(n+x) + (1-x)g(n+x+1) = \\
= & x\log\Gamma(n+x) + (1-x)\log\Gamma(n+x+1) = \\
= & x\log\Gamma(n+x) + (1-x)\log((n+x)\Gamma(n+x)) = \\
= & \log\Gamma(n+x) + (1-x)\log(n+x),
\end{aligned}$$

односно

$$n! \leq \Gamma(n+x)(n+x)^{1-x} = (n+x-1)\dots x\Gamma(x)(n+x)^{1-x}.$$

Тако је

$$\Gamma(x) \leq \frac{(n-1)!n^x}{x(x+1)\dots(n-1+x)} \leq \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+x}\right)^x (n+x)\Gamma(x).$$

Према Теореми о два полицајца је, онда

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)!n^x}{x(x+1)\dots(n-1+x)} = \Gamma(x).$$

Згодније је у последњем низу узети $n+1$ уместо n, и искористити чињеницу да је $(n+1)^x \sim n^x$, одакле добијамо, такозвану *Ојлерову формулу*

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(n+x)}. \tag{23}$$

Њу смо доказали за $0 < x < 1$, чиме је доказано да је Γ функција јединствено одређена условима $(i) - (iii)$ на интервалу $(0, 1)$. Међутим, одатле је због услова (ii) потпуно одређена свуда. Штавише, могуће је показати да формула (23) важи за све $x > 0$, и то тако што ћемо показати да се њено важење преноси са x на $x+1$. Заиста, лева страна једнакости (23) задовољава једнакост (ii). Међутим задовољава и десна, јер ако десну страну означимо са $h(x)$, онда имамо

$$h(x+1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n! n^{x+1}}{(x+1)\dots(n+x)(n+1+x)} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{n+x+1} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(n+x)} = xh(x).$$

13.35. Вајерштрасова формула за Γ-функцију. Важи једнакост

$$\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \prod_{k=1}^{+\infty} e^{x/k} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{-1},$$

где је

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

Ојлер-Маскеронијева константа (видети вежбање 1 поглавља Низови).

Заиста, из Ојлерове формуле (23) на основу непрекидности функције log налазимо

(24)
$$\log \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \left[x \log n - \log x - \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{x}{k}\right)\right] =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left[x\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \gamma + \alpha_n(\text{- нула низ})\right) - \log x - \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{x}{k}\right)\right] =$$
$$= -\gamma x - \log x + \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{x}{k} - \log\left(1 + \frac{x}{k}\right)\right] =$$
$$= -\gamma x - \log x + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{x}{k} - \log\left(1 + \frac{x}{k}\right)\right],$$

одакле следи формула узимањем експонента обе стране.

Из Вајерштрасове фомруле (логаритмоване) може се закључити да је Γ функција диференцијабилна. Заиста, изводни ред, реда који се појављује у (24) је локално равномерно конвергентан према Вајерштрасовом критеријуму, јер му је општи члан једнак

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} = \frac{x}{k(x+k)} \le \frac{M}{k^2},$$

за $x \in (0, M)$, па је према Ставу 13.16, дозвољено диференцирање под знаком суме.

Тако је

$$(\log \Gamma(x))' = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}\right].$$

Посебно, ако се стави $x = 1$, у последњем реду долази до скраћивања, његова сума једнака је 1, па добијамо $\Gamma'(1) = -\gamma$.

13.36. Ојлерова B**-функција.** Бета функција је функција две променљиве $\mathrm{B} : (0, +\infty)^2 \to \mathbf{R}$, дата са

$$\mathrm{B}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t.$$

Интеграл има две (могуће) несвојсвене тачке 0 и 1, и то ако је $x < 1$, односно $y < 1$. Међутим, једноставно се види да интеграл у тим тачкама конвергира.

B-функција је очигледно позитивна. Једноставно, сменом $t = 1 - s$ видимо да је B-функција симетрична, то јест

$$\mathrm{B}(x, y) = \mathrm{B}(y, x).$$

Такође једноставно се рачуна

$$\mathrm{B}(1, y) = \int_0^1 (1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{y}(1-t)^y\Big|_0^1 = \frac{1}{y}.$$

Основна особина Бета функције је следећа њена веза са Γ-функцијом.

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{25}$$

Ова се релација може доказати на више начина. Први начине је да докажемо да за свако y, функција $g_y : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ дата са

$$g_y(x) = \frac{\mathrm{B}(x, y)\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}$$

задовољава услове $(i) - (iii)$ одељка 13.33.

(i) услов: Имамо $g_y(1) = \dfrac{\mathrm{B}(1, y)\Gamma(1+y)}{\Gamma(y)} = \dfrac{(1/y)y\Gamma(y)}{\Gamma(y)} = 1.$

(ii) услов: Пре него што га покажемо, треба извести одређену једнакост за B-функцију, која се добија парцијалном интеграцијом, уз мало нелогично прегруписање. Имамо

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}(x+1, y) = &\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \\
= &\int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^x (1-t)^{x+y-1}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^x \mathrm{d}\frac{(1-t)^{x+y}}{x+y} = \\
= &-\frac{t^x(1-t)^y}{x+y}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-t)^{x+y}}{x+y} x \left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1} \frac{1-t+t}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t = \\
= &\frac{x}{x+y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x+y-x+1-2}\,\mathrm{d}t = \frac{x}{x+y}\mathrm{B}(x, y).
\end{aligned}$$

Отуда је

$$g_y(x+1) = \frac{\mathrm{B}(x+1, y)\Gamma(x+y+1)}{\Gamma(y)} = \frac{\frac{x}{x+y}\mathrm{B}(x, y)(x+y)\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)} = xg_y(x).$$

(iii) услов. Доказаћемо најпре да је пресликавање $x \mapsto \mathrm{B}(x, y)$ логаритамски конвкесно, за све y. Заиста, применом Хелдерове неједнакости, налазимо

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(\theta x_1 + (1-\theta)x_2, y) = &\int_0^1 t^{\theta x_1 + (1-\theta)x_2 - 1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \\ = &\int_0^1 \left(t^{x_1-1}(1-t)^{y-1}\right)^{\theta}\left(t^{x_2-1}(1-t)^{y-1}\right)^{1-\theta}\,\mathrm{d}t \le \\ \le &\left(\int_0^1 t^{x_1-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t\right)^{\theta}\left(\int_0^1 t^{x_2-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t\right)^{1-\theta}\,\mathrm{d}t = \\ = &\mathrm{B}(x_1, y)^{\theta}\mathrm{B}(x_2, y)^{1-\theta}.\end{aligned}$$

Одатле је

$$g_y(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) = \frac{\mathrm{B}(\theta x_1 + (1-\theta)x_2, y)\Gamma(\theta x_1 + (1-\theta)x_2 + y)}{\Gamma(y)} \le$$
$$\frac{\mathrm{B}(x_1, y)^{\theta}\mathrm{B}(x_2, y)^{1-\theta}\Gamma(x_1+y)^{\theta}\Gamma(x_2+y)^{1-\theta}}{\Gamma(y)} = g_y(x_1)^{\theta}g_y(x_2)^{1-\theta}.$$

Други начин доказивања једнакости (25), који користи Теорему о Јакобијану за несвојствене интеграле, приказан је у параграфу 11.28.

13.37. Разне особине Γ функције. 1° $\Gamma(n+1) = n!$. Заиста, узастопном применом услова (ii) налазимо $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n-1) = \cdots = n!\Gamma(1) = n!$.

2° $\Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$. Прво ћемо израчунати $\Gamma(1/2)$. На основу (25) имамо

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1)} = \mathrm{B}(1/2, 1/2) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}.$$

Последњи интеграл се може израчунати сменом $t/(1-t) = s^2$, (одакле следи $t = s^2/(1+s^2)$), па тако имамо

$$\Gamma(1/2)^2 = \int_0^{+\infty} s\frac{1+s^2}{s^2}\frac{2s(1+s^2) - 2ss^2}{(1+s^2)^2}\,\mathrm{d}s = \int_0^{+\infty}\frac{2\,\mathrm{d}s}{1+s^2} = 2\operatorname{arctg} s|_0^{+\infty} = \pi.$$

Даље се применом услова (ii) добија

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{2n-1}{2}\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right) = \cdots = \frac{2n-1}{2}\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

3° Асимптотско понашање Γ функције у крајевима домена је овакво

$$\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}, \quad x \to 0+, \qquad \Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi}x^{x-1/2}e^{-x}, \quad x \to +\infty$$

Заиста, прва формула следи из $\Gamma(x) = \Gamma(x+1)/x$, и непрекидности Γ-функције. Друга је такозвана Стирлингова формула и биће доказана у параграфу 14.16 у глави Интеграли са параметром.

4° Γ функција је конвексна, јер је композиција две конвексне функције exp и $\log\Gamma$, од којих је прва растућа. Тиме је Γ-функција непрекидна, има увек леви и десни извод, и диференцијабилна је свуда осим у највише пребројиво много тачака. Штавише, њен извод је растућа функција, па Γ функција опада до свог минимума, па онда расте. Тај минимум се налази између 1 и 2, јер је $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$.

5° Више од тога, може се показати да је Γ функција бесконачно пута диференцијабилна, и да важи

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \log^n t \, \mathrm{d}t.$$

што ћемо доказати у параграфу 14.17 главе Интеграли са параметром.

6° Γ функција се може продужити и на негативне не целе бројеве задржавајући улсов (ii). Наиме, тада за $-1 < x < 0$ дефинишемо $\Gamma(x) = \Gamma(x+1)/x$, и тако редом.

Штавише може се продужити и на све комплексне бројеве, осим негативних целих, применом такозваног аналитичког продужења.

7° Формула допуњавања. За све $0 < x < 1$ важи

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

Извођење ове формуле се заснива на такозваном Ојлеровом разлагању синуса

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right), \tag{26}$$

чији је доказ описан у вежбању 3, главе Фуријеови редови. Ако за тренутак прихватимо да је формула тачна, онда из Ојлерове формуле за Γ-функцију, налазимо

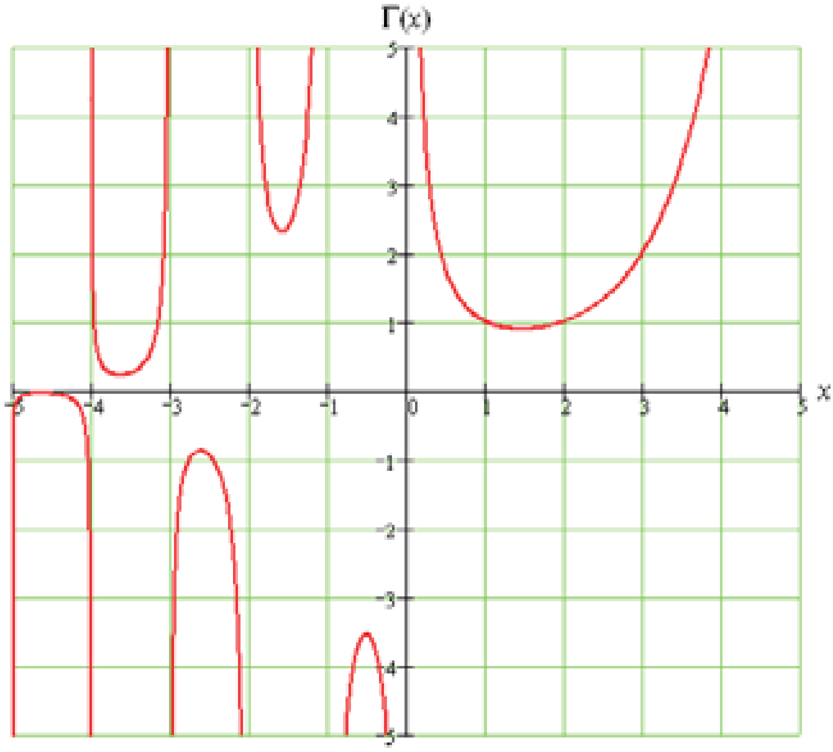
$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^2 n^x n^{1-x}}{x(x+1)\dots(x+n)(1-x)(2-x)\dots(n+1-x)}.$$

Ако у имениоцу издвојимо x и $n+1-x$, а остале чиниоце групишемо тако да можемо да применимо разлику квадрата, налазимо

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{x(n+1-x)} \frac{1^2 2^2 \dots n^2}{(1-x^2)(4-x^2)\dots(n^2-x^2)} = \frac{1}{x} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1-x)(1-x^2/4)\dots(1-x^2/n^2)},$$

што заједно са (26) доказује формулу допуњавања, за $0 < x < 1$. Она се може продужити до свих реалних не целих бројева, јер се једноставно види да додавањем јединице на x обе стране добијају по један минус.

8° График Γ функције приказан је на слици 6.



Слика 6

ПРОСТОР $C[a,b]$

13.38. Скуп $C[a,b]$ свих непрекидних функција на сегменту $[a,b]$ има алгебарску структуру векторског простора, са природно уведеним операцијама сабирања и множења скаларом. Он се може посматрати и као реални и као комплексни векторски простор. Овде ће бити реалан. Дакле, дефинишимо

$$C[a,b] = \{x : [a,b] \to \mathbf{R} \mid x \text{ непрекидна}\}.$$

За дате функције $x, y \in C[a,b]$ и $\lambda \in \mathbf{R}$ дефинишемо функције $x+y, \lambda x : [a,b] \to \mathbf{R}$ са

$$(x+y)(t) = x(t) + y(t), \qquad (\lambda x)(t) = \lambda x(t).$$

Са тако уведеним операцијама $+$ и $\cdot$, $C[a,b]$ има структуру векторског простора. Можемо увести и норму, помоћу

$$||x|| = \max_{a \le t \le b} |x(t)|.$$

Норма је коректно дефинисана, јер је заједно са функцијом x и функција $|x|$ непрекидна, па достиже максимум на затвореном интервалу. Помоћу норме на природан начин уводимо метрику

$$d(x,y) = ||x - y|| = \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|.$$

Овај простор поменули смо у глави Метрички простори. Са уведеним појмом равномерне конвергенције, могуће је детаљније проучити овај простор. Пре свега низ x_n конвергира ка x у простору $C[a,b]$ ако и само ако x_n равномерно конвергира ка x, то се једноставно види, јер $x_n \to x$ у метрици простора $C[a,b]$ ако и само ако $d(x_n, x) = \max_{a \le t \le b} |x_n(t) - x(t)| \to 0$, а како су у случају непрекидних функција max и sup једно те исто, онда је то еквивалентно услову (3), што је, пак, еквивалентно равномерној конвергенцији.

13.39. Став. Простор $C[a,b]$ је комплетан.

Доказ. Нека је x_n Кошијев низ у $C[a,b]$. То значи да је испуњено

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbf{N} \, \forall m \ge n \ge n_0 \;\; d(x_n, x) = \max_{a \le t \le b} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon. \tag{27}$$

Фиксирамо $t \in [a,b]$. Како је $|x_m(t) - x_n(t)| \le \max_{a \le t \le b} |x_m(t) - x_n(t)|$, то из претходног произилази да је низ реалних бројева $x_n(t)$ Кошијев низ, па је према томе конвергентан. Постоји, дакле функција

$$x(t) = \lim_{n \to +\infty} x_n(t),$$

с тим што је реч о конвергенцији тачка по тачка. Међутим, ако у последњој неједнакости у (27) $|x_m(t) - x_n(t)| \le \varepsilon$, која важи за све t, пустимо лимес кад $m \to +\infty$, а то можемо јер m није огеаничено одозго, онда за све $t \in [a,b]$ налазимо

$$|x(t) - x_n(t)| \le \varepsilon,$$

односно

$$\sup_{a \le t \le b} |x(t) - x_n(t)| \le \varepsilon,$$

а када се прочита преамбула формуле (27) онда то управо значи да $x_n \rightrightarrows x$, односно $d(x_n, x)$. Одатле, на основу Става 13.14 следи да је функција x непрекидна. $\square$

Теорема која следи назива се *Вајерштрасова теорема о апроксимацији*, а неки кажу и *прва Вајерштрасова теорема о апроксимацији.* Грубо говорећи она тврди да се свака непрекидна функција на сегменту може равномерно апроксимирати полиномима. Доказ који овде презентирамо заснива се на следећој леми. Другачији начин доказивања Вајерштрасове теореме може се наћи у вежбањима 29, 30 и 31.

13.40. Лема. Нека је дата функција, $W_n : [-1,1] \to \mathbf{R}$ са

$$W_n(x) = A_n (1 - x^2)^n,$$

где је константа A_n одређена са

$$A_n = \left(\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n \, \mathrm{d}x \right)^{-1}.$$

Тада важи:
(i) $A_n \le (n+1)/2$;
(ii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} W_n(x) \, \mathrm{d}x = 1$ и $W_n(x) \ge 0$ за све $x \in [-1,1]$;
(iii) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_{\delta \le |x| \le 1} W_n(x) \, \mathrm{d}x = 0$, за свако $\delta > 0$.

Доказ. (i) На интервалу $[0,1]$ важи $x^2 \leq x$ па је $(1-x^2)^n \geq (1-x)^n$, и отуда

$$A_n^{-1} = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x \geq 2\int_0^1 (1-x)^n \,\mathrm{d}x = \frac{2}{n+1};$$

(ii) Позитивност је очита, а константе A_n су управо тако подешене да интеграл буде једнак 1;

(iii) За $|x| \geq \delta$ је $W_n(x) = A_n(1-x^2)^n \leq A_n(1-\delta^2)^n \leq (n+1)(1-\delta^2)^n/2 \to 0$. □

Примедба: За константе A_n се може рећи и прецизније. Наиме сменом $x^2 = t$ добијамо

$$A_n^{-1} = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x =$$
$$= 2\int_0^1 (1-t)^n \frac{1}{2\sqrt{t}} \,\mathrm{d}t = \mathrm{B}(n+1, 1/2) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+3/2)}.$$

Одатле се према Стирлинговој формули (параграф 14.16) може добити $A_n \sim \sqrt{n/\pi}$.

13.41. Теорема [Вајерштрасова о апроксимацији]. Нека је $f \in C[a,b]$ произвољна функција. Тада постоји низ полинома p_n, такав да $p_n \rightrightarrows f$. Другим речима, скуп свих полинома је свуда густ у простору $C[a,b]$.

Доказ. 1° Доказаћемо прво посебан случај када је $[a,b] = [0,1]$ и када је $f(0) = f(1) = 0$. Узмимо још да је f продужена ван $[0,1]$ нулом, и уочимо функције

$$p_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t) W_n(t) = (\text{смена } x+t=s)$$
$$= \int_{x-1}^{x+1} f(s) W_n(s-x) \,\mathrm{d}s = \int_0^1 f(s) W_n(s-x) \,\mathrm{d}s.$$

Из последњег се види да су p_n полиноми, и то парног степена.

Уочимо $\varepsilon > 0$ и оценимо (користећи резултате леме)

$$\begin{aligned} |f(x) - p_n(x)| &= \left| f(x)\int_{-1}^{1} W_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^{1} f(x+t) W_n(t)\,\mathrm{d}t \right| = \\ &= \left| \int_{-1}^{1} (f(x) - f(x+t)) W_n(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \\ &\leq \int_{|t|\leq\delta} |f(x) - f(x+t)| W_n(t)\,\mathrm{d}t + \\ &\qquad + \int_{\delta\leq|t|\leq 1} |f(x) - f(x+t)| W_n(t)|\,\mathrm{d}t = \\ &= S_1 + S_2, \end{aligned}$$

где смо δ одабрали из дефиниције равномерне непрекидности функције f. У првом сабирку је, онда, растојање између x и $x+t$ мање од δ, па је $|f(x) -$

$f(x+t)| \leq \varepsilon$. Тако је

$$S_1 \leq \varepsilon \int_{|t|\leq\delta} W_n(t)\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon \int_{-1}^{1} W_n(t)\,\mathrm{d}t = \varepsilon.$$

Ако са M означимо ограничење функције $|f|$, онда је други сабирак мањи од

$$S_2 \leq 2M \int_{\delta\leq|t|\leq 1} W_n(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon,$$

за довољно велико n. Тако је за све $x \in [0,1]$ и за све довољно велике n

$$|f(x) - p_n(x)| < 2\varepsilon,$$

а то управо значи да $p_n \rightrightarrows f$.

2° Покажимо како се из овог посебног случаја може извести општи. Наиме, нека је $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ произвољна непрекидна функција. Тада су функције

$$g(x) = f(a + x(b-a)), \qquad h(x) = g(x) - g(0) - x(g(1) - g(0))$$

такође непрекидне, али су дефинисане на $[0,1]$. За функцију h још важи $h(0) = h(1) = 0$. Зато постоји низ полинома $p_n \rightrightarrows h$. Тада низ полинома $q_n(x) = p_n(x) + g(0) + x(g(1) - g(0))$ равномерно конвергира ка g, а низ полинома

$$r_n(x) = q_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

равномерно конвергира ка f. $\square$

13.42. Последица. Простор $C[a,b]$ је сепарабилан.

Доказ. Показаћемо да је скуп свих полинома $P_{\mathbf{Q}}$ са рационалним коефицијентима пребројив свуда густ скуп.

Да је пребројив видимо на следећи начин. Нека P_n означава скуп свих полинома са рационалним коефицијентима, мањег или једнаког од n. Пресликавање $\psi : \mathbf{Q}^{n+1} \to P_n$ дато са $\psi(a_0, a_1, \ldots, a_n) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ је бијекција. Отуда P_n има исту кардиналност као и $\mathbf{Q}^{n+1}$ - дакле пребројив је. Како је $P_{\mathbf{Q}} = \bigcup_{n\geq 1} P_n$, то је $P_{\mathbf{Q}}$ пребројива унија пребројивих скупова, па је и сам пребројив.

За дато $f \in C[a,b]$, према Вајерштрасовој теореми о апроксимацији, постоји полином $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ такав да је $||f - p|| < \varepsilon/2$. Међутим постоје и рационални бројеви $b_0, b_1, \ldots, b_n$ такви да је $|a_j - b_j| \leq \varepsilon/(2(n+1)M_j)$, где је $M_j = \max_{a\leq x\leq b} |x^j|$. Тада, ако означимо са $q(x)$ полином $b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$, за све $x \in [a,b]$ имамо

$$|p(x) - q(x)| = |(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \cdots + (a_n - b_n)x^n)| < \sum_{j=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2(n+1)M_j} |x^j| \leq \varepsilon/2.$$

Тако је

$$||f - q|| \leq ||f - p|| + ||p - q|| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Дакле, скуп свих полинома са рационалним коефицијентима је свуда густ у $C[a,b]$. Како је тај скуп уједно и пребројив, то значи да је $C[a,b]$ сепарабилан. $\square$

ВЕЖБАЊА

1. Испитати да ли низ функција f_n равномерно конвергира на скупу A:
а) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, $A = \mathbf{R}$;
б) $f_n(x) = \sin\frac{x}{n}$, $A = \mathbf{R}$;
в) $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$, $A = [0, 1-\varepsilon]$;
г) $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$, $A = [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$;
д) $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$, $A = [1+\varepsilon, +\infty)$;
ђ) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}$, $A = [0, 1]$;
е) $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$, $A = (0, +\infty)$
ж) $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$, $A = [\varepsilon, +\infty)$;
з) $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$, $A = (0, +\infty)$.

2. Испитати да ли дати редови конвергирају на датим скуповима:
а) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ на $\mathbf{R}$;
б) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$ на $[0, 2\pi]$;
в) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$ на $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$;
г) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$ на $[0, +\infty)$;
д) $\sum_{n=1}^{+\infty} x^2 e^{-nx}$ на $[0, +\infty)$;
ђ) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ на $[0, +\infty)$;
е) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$ на $\mathbf{R}$.

3. Нека је $x > 0$, $a_n > 0$, $n = 1, 2, \dots, n, \dots$ и нека ред $\sum(1/a_n)$ дивергира. Доказати да тада ред

$$\frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x} + \dots$$

конвергира и наћи његов збир.

4. У интервалу $(-\infty, +\infty)$ дат је низ функција $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n\sin^2\pi x}$, $n = 1, 2, \dots$. Одредити његову граничну вредност $f(x)$ и испитати како се апроксимационе криве $y = f_n(x)$ приближавају граничној кривој $y = f(x)$. У којим интервалима низ $f_n(x)$ равномерно конвергира? Да ли је $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ за ма који коначан интервал $[a, b]$?

5. а) Ако је a_n опадајући низ који тежи ка нули, онда важи једнакост

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n = -\frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(a_n - a_{n+1});$$

б) Нека је $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$. Одредити област конвергенције овог реда. Наћи $\lim\limits_{x\to 0+}\varphi(x)$.

6. Нека је $f = f_0 : [0, 1] \to \mathbf{R}$ непрекидна функција, и $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$, за $n = 0, 1, \dots$ и $0 \le x \le 1$. Доказати да је функција $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ дефинисана и непрекидна на $[0, 1]$, и изразити φ преко f.

7. Нека је $f(t)=\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}[nt]$, за $t\in\mathbf{R}$.
а) Одредити све тачке из $\mathbf{R}$ у којима је функција f непрекидна;
б) Израчунати:

$$1^\circ\ \lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t};\qquad 2^\circ\ \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t;\qquad 3^\circ\ \frac{1}{2}(f(0+)+f(0-)).$$

8. Користећи редове показати да је $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^m}$.

9. Израчунати $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos ax\,\mathrm{d}x$ развијајући функцију $\cos ax$ у Маклоренов ред.

10. Доказати да за $0\le\alpha\le 1$ важи једнакост

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)^2}=\int_0^{\pi/2}\arcsin(\alpha\cos x)\,\mathrm{d}x,$$

и израчунати збир $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

11. Израчунати $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\operatorname{ctg} t\log\frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t$.

12. Нека је реалан ред a_n конвергентан и $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n=\alpha$. Доказати да је функција $f(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\frac{t^n}{n!}$ дефинисана на читавом $\mathbf{R}$ и да је $\int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t=\alpha$. Одредити бар једно $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ са особином $\int_0^{+\infty} e^{-t}f(x,t)\,\mathrm{d}t=e^x$ за све $x\in\mathbf{R}$.

13. Наћи у облику реда вредност интеграла $J=\int_0^1\log x\log(1-x)\,\mathrm{d}x$.

14. Нека је $a>0$. Коришћењем развоја функције $x\mapsto\dfrac{1}{a^2+x^2}$ по степенима x/a и a/x израчунати $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\log x}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$.

15. Служећи се редовима, израчунати интеграл

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x\,\mathrm{d}x}{(1-2a\cos x+a^2)(1-2b\cos x+b^2)},\qquad |a|,|b|<1.$$

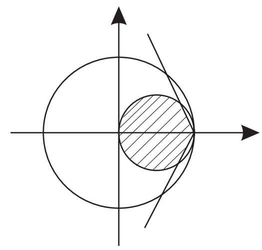
[Упутство: Показати да је $\frac{\sin x}{1-2a\cos x+a^2}=\sum_{n=0}^{+\infty} a^n\sin(n+1)x$.]

16. а) Нека је $|z-1/2| < 1/2$ и $|\operatorname{Im}(1-z)| \leq K \operatorname{Re}(1-z)$ - област D_K приказана на слици. Доказати да је тада $|z| < 1$ и $|1-z| \leq M(1-|z|)$, где је $M = 2\sqrt{1+K^2}$;

б) Нека је дат степени ред $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, који конвергира за $z = 1$ ка $A \in \mathbf{C}$, и нека је $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. Доказати да је

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = (1-z) \sum_{n=0}^{+\infty} (s_n - A) z^n;$$

в) Доказати да $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ равномерно ковергира ка A, кад $D_k \ni z \to 1$ (комплексна варијанта Абелове теореме).



Слика 7

17. Израчунати $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$ помоћу реда, знајући да је $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$.

18. Доказати једнакост $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots.$

19. Одредити суму реда $1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \dots.$

20. а) Доказати да је са $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+n^2}$ дефинисана непрекидна функција на $[-1, 1]$;

б) Доказати да је f непрекидно диференцијабилна на $[-1, 1)$;

в) Доказати да је $f'_-(1) = +\infty$.

21. Нека је $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1+n^3}$. Одредити област дефинисаности D функције f, као и скуп тачака $D_1 \subseteq D$ у којима f има (коначан) извод. Испитати непрекидност функције f на D и f' на D_1.

22. а) Испитати конвергенцију и наћи збир реда $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n(2n-1)}$;

б) Доказати једнакост $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(4n^2-1)} = 1 - \log 2.$

23. Дата је функција $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$. Одредити домен функције f и доказати да је

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} \log \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-x}} \operatorname{arctg} \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}.$$

Дакле, аналитичка функција се неки пут мора задати са два израза. Ово уједно указује да су log и arctg „једно те исто“. Више о томе у курсу комплексних функција.

24. а) Испитати конвергенцију и наћи збир реда

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n-1}; \tag{28}$$

б) Испитати функцију $f(x)$ дефинисану изразом који представља збир реда (28) свуда где тај израз има смисла. Нацртати њен график;

в) Израчунати и геометријски протумачити изразе $S_1 = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$ и $S_2 = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1}$.

25. Дат је степени ред $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{2n}$.

а) Одредити област обичне, апсолутне и равномерне конвергенције реда;
б) Израчунати суму тог реда за оне x за које конвергира;
в) Израчунати збир $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \dots$

26. Дат је интеграл $I(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x^a}\, \mathrm{d}x$ $(a \in \mathbf{R})$.

а) Испитати његову конвергенцију;
б) Користећи Γ-функцију, израчунати $\lim_{a\to+\infty} I(a)$;
в) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{I(1/n)} \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^n$;
г) Сабрати тај ред.

27. Испитати конвергенцију и наћи збирове редова: 1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n)!}(2x)^{2n}$; 2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.

[Упутство: доказати да дати редови задовољавају неку линеарну диференцијалну једначину.]

28. Доказати да ред

$$\sum_{p-\text{прост број}} \frac{1}{p}$$

дивергира.

[Упутство: Применити идеје параграфа 18.]

29. а) Доказати да се свака непрекидна функција на $[a,b]$ може равномерно апроксимирати изломљеном линијом са теменима $(x_k, f(x_k))$ за погодно одабрану поделу интервала $[a,b]$;

б) Доказати да се свака изломљена линија из тачке а) може приказати као коначна линеарна комбинација функција облика $x \mapsto |x - x_k|$ функције x и константе 1;

в) Доказати да се функција $x \mapsto |x - x_k|$ може равномерно апроксимирати полиномима, користећи развој

$$|x| = \sqrt{1 + (x^2-1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{n} (x^2-1)^n;$$

г) Доказати, користећи претходне тачке, Вајерштрасову теорему о апроксимацији.

30. Дати су *Бернштајнови полиноми*

$$B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

а за дату непрекидну на $[0,1]$ функцију f полиноми

$$p_n(x;f)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x).$$

а) Показати да је $\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x)\equiv 1$;

б) Показати да $p_n(x;f)\rightrightarrows f$, ако је f једна од функција $h_0(x)\equiv 1$, $h_1(x)=x$ и $h_2(x)=x^2$;

в) За дато $\varepsilon>0$, нека је δ такво да $|x-y|<\delta$ повлачи $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ (равномерна непрекидност), нека је M огранчење функције $|f|$, и нека је $\xi\in[0,1]$ фиксирано. Доказати (раздвајајући случајеве) да за све x важи

$$|f(x)-f(\xi)|\le 2M\left(\frac{x-\xi}{\delta}\right)^2+\varepsilon;$$

г) Ако је $h(x)=(x-\xi)^2$ доказати, коришћењем претходне неједнакости да је

$$|p_n(x;f-f(\xi))|\le \frac{2M}{\delta^2}p_n(x;h)+\varepsilon; \tag{29}$$

д) Коришћењем претходних тачака доказати Вајерштрасову теорему о апроксимацији.

31. За линерано пресликавање $A: C[a,b]\to C[a,b]$ кажемо да је *позитивно* ако из $f(x)\ge 0$ за све x следи $(Af)(x)\ge 0$ за све x. Кажемо да је скуп $\mathcal{M}\subseteq C[a,b]$ *минимизирајући* ако за све $t\in[a,b]$ постоји f коначна линеарна комбинација функција из $\mathcal{M}$ такво да f има строги минимум у t.

а) Угелдајући се на претходни задатак доказати *Теорему Коровкина*: Ако низ позитвиних линеарних пресликавања A_n има особину да $A_nf\rightrightarrows f$ за све $f\in\mathcal{M}$, онда $A_nf\rightrightarrows f$ за све $f\in C[a,b]$;

б) Доказати да су скупови $\{1,x,x^2\}$ и $\{1,\cos x,\sin x\}$ минимизирајући;

в) Доказати да су следећа пресликавања позитивна:

(*i*) $f\mapsto p_n(x;f)$, где је p_n дефинисано са (29);

(*ii*) $f\mapsto \int_{-1}^{1} f(x-t)W_n(t)\,\mathrm{d}t$, где је W_n функција из Леме 13.40

(*iii*) $f\mapsto \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)F_n(t)\,\mathrm{d}t$, где је F_n Фејерово језгро дефинисано у Ставу 15.16.